Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue.
No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: .... Código materia: .... Curso: ....

1. Sean $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g(x,y) = [f(x,y)]^2 + (y-1)^2$. Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ es la curva de nivel 0 de f hallar los extremos absolutos de g restringidos a C.

2. Sea el campo conservativo $\vec{G}(\vec{r}) = \dfrac{2\vec{r}}{||\vec{r}||^4}$, $\vec{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, hallar las líneas de campo de $\vec{G}$ y las curvas equipotenciales.

3. Sean $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $h(x,y,z) > 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $C \subset \mathbb{R}^3$ un arco de curva con punto inicial P y punto final Q. Demostrar que $\vec{F} = \dfrac{\nabla h}{h}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^3$ y calcular la circulación del campo $\vec{F}$ sobre C sabiendo que la circulación de ∇h sobre C es nula.

4. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, e^z, sen(x))$ a través de la superficie frontera del cuerpo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2};\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. Indicar en un gráfico la normal utilizada.

5. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial $C^3(R^3)$ tal que $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (-2x, y, z)$ y $g(x,y,z) = x^2y + yz^2$. Siendo $\vec{H} = \vec{F} + \nabla g$, hallar la circulación de $\vec{H}$ a lo largo de la curva frontera de la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in R^3 : y^2+z^2 = 1;\ 0 \leq x \leq y;\ z \geq 0\}$.
Indicar en un gráfico el sentido de circulación elegido.

① Sean $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g(x,y) = [f(x,y)]^2 + (y-1)^2$. Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ es la curva de nivel 0 de f hallar los extremos absolutos de g restringidos a C

Parametrizo C: Sea $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tq $\bar{\gamma}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

Ahora defino $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $h(t) = g(\bar{\gamma}(t)) = [f(\bar{\gamma}(t))]^2 + (\text{sen}(t) - 1)^2$

Como C, parametrizada por $\bar{\gamma}(t)$, es la curva de nivel 0 de f entonces a lo largo de todos los puntos de C f vale 0 $\therefore f(\bar{\gamma}(t)) = 0$

Así es como:

$$h(t) = g(\bar{\gamma}(t)) = \overbrace{[f(\bar{\gamma}(t))]^2}^{0} + (\text{sen}(t) - 1)^2$$

$$\boxed{h(t) = \text{sen}^2(t) - 2\,\text{sen}(t) + 1}$$

Por lo tanto, los Puntos Críticos son:

a) los extremos de C en la parametrización (o sea $t_1 = 0 \wedge t_2 = 2\pi$)

$\boxed{PC_1 = \bar{\gamma}(0) = (1,0)}$ (es el mismo que $\bar{\gamma}(2\pi) = (1,0)$)

b) los puntos de la curva donde la función se anula, para eso derivo $h(t)$ y la igualo a cero

$h'(t) = 2\,\text{sen}(t)\cos(t) - 2\cos(t) = 0$

- si $\cos(t) = 0 \to h'(t) = 0$: $\cos(t) = 0 \Rightarrow t_3 = \pi/2 \wedge t_4 = 3\pi/2$

$\therefore \boxed{PC_2 = \bar{\gamma}(\pi/2) = (0,1)}$ $\boxed{PC_3 = \bar{\gamma}(3\pi/2) = (0,-1)}$

- si $\cos(t) \neq 0 \to \cancel{2}\,\text{sen}(t)\cancel{\cos(t)} = \cancel{2}\cancel{\cos(t)} \Rightarrow \text{sen}(t) = 1 \to t_5 = \pi/2 = t_3$ ✓

Como C es un conjunto compacto (cerrado y acotado) por el teorema de Weierstrass puedo asegurar que $\exists$ al menos un máximo y un mínimo absoluto. Por lo tanto, evalúo g en los PC hallados y defino los extremos absolutos:

$g(t) = \underbrace{f(t)}_{0} + (y-1)^2$

$g(PC_1) = g(1,0) = 1$
$g(PC_2) = g(0,1) = 0$
$g(PC_3) = g(0,-1) = 4$

en $(0,1)$ g alcanza MÍNIMO absoluto $= 0$
en $(0,-1)$ g alcanza MÁXIMO absoluto $= 4$

② Sea el campo conservativo $\bar{G}(\bar{r}) = \frac{2\bar{r}}{\|\bar{r}\|^4}$, $\bar{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, hallar las líneas de campo de $\bar{G}$ y las curvas equipotenciales.

$$\bar{r} = (x,y) \rightarrow \bar{G}(\bar{r}) = \bar{G}(x,y) = \frac{2(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4} = \frac{2(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \bar{G}(x,y)$$

Para hallar las líneas de campo tenemos que $\bar{G}(x,y) = \bar{G}(x_{(t)}, y_{(t)}) = (x'_{(t)}, y'_{(t)})$

$$\therefore \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = (x'(t), y'(t))$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} = x'(t) \\ \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = y'(t) \end{cases} \rightarrow \frac{x'}{y'} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}}{\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{x}{y} = \frac{dx}{dy} \rightarrow \boxed{\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx \xrightarrow{\text{integro m.a.m}} \ln(|y|) = \ln(|x|) + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} \therefore = e^{\ln|x|} \cdot e^{c}$$

$\therefore$ Líneas de campo: $\boxed{y = x \cdot K}$ → familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas

Las curvas equipotenciales son ORTOGONALES a las líneas de campo, como las l.c. son rectas que pasan por el origen → c. equip. son circunferencias centradas en el origen → Curvas equip.: $\boxed{x^2+y^2=K}$

Analíticamente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = y'_1 \text{ , flia equip: } y'_2 = -\frac{1}{y'_1} = \boxed{\frac{-x}{y} = y'_2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \rightarrow y\,dy = -x\,dx \xrightarrow{\text{integro}} \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$$

tomo $2c = K$ → $\boxed{x^2+y^2=K}$

③ Sean $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $h(x,y,z) > 0$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}$ y $C \subset \mathbb{R}^3$ un arco de curva con punto inicial P y punto final Q. Demostrar que $\vec{F} = \frac{\nabla h}{h}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^3$ y calcular la circulación del campo $\vec{F}$ sobre C sabiendo que la circulación de ∇h sobre C es nula.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq. $\varphi(x,y,z) = \ln(h(xyz)) \to \nabla\varphi = \frac{\nabla h(xyz)}{h(xyz)}$

Por lo tanto $\exists\, \varphi$ tq $\vec{F} = \nabla\varphi$

Por enunciado, $h \in C^2 \to \nabla h \in C^1 \to \nabla\varphi \in C^1 \to \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ①

y $Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^3 \to$ es simplemente conexo ②

Como se cumplen ① y ② $\to \vec{F}$ es un campo conservativo $\Rightarrow$ **$\vec{F}$ es campo de gradientes en $\mathbb{R}^3$**

Ahora calculo la circulación de $\vec{F}$ sobre C

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{\ell} \overset{\vec{F}\text{ es conservativo}}{=} \varphi(Q) - \varphi(P) = \ln(h(Q)) - \ln(h(P)) = \ln\left(\frac{h(Q)}{h(P)}\right) \quad *$$

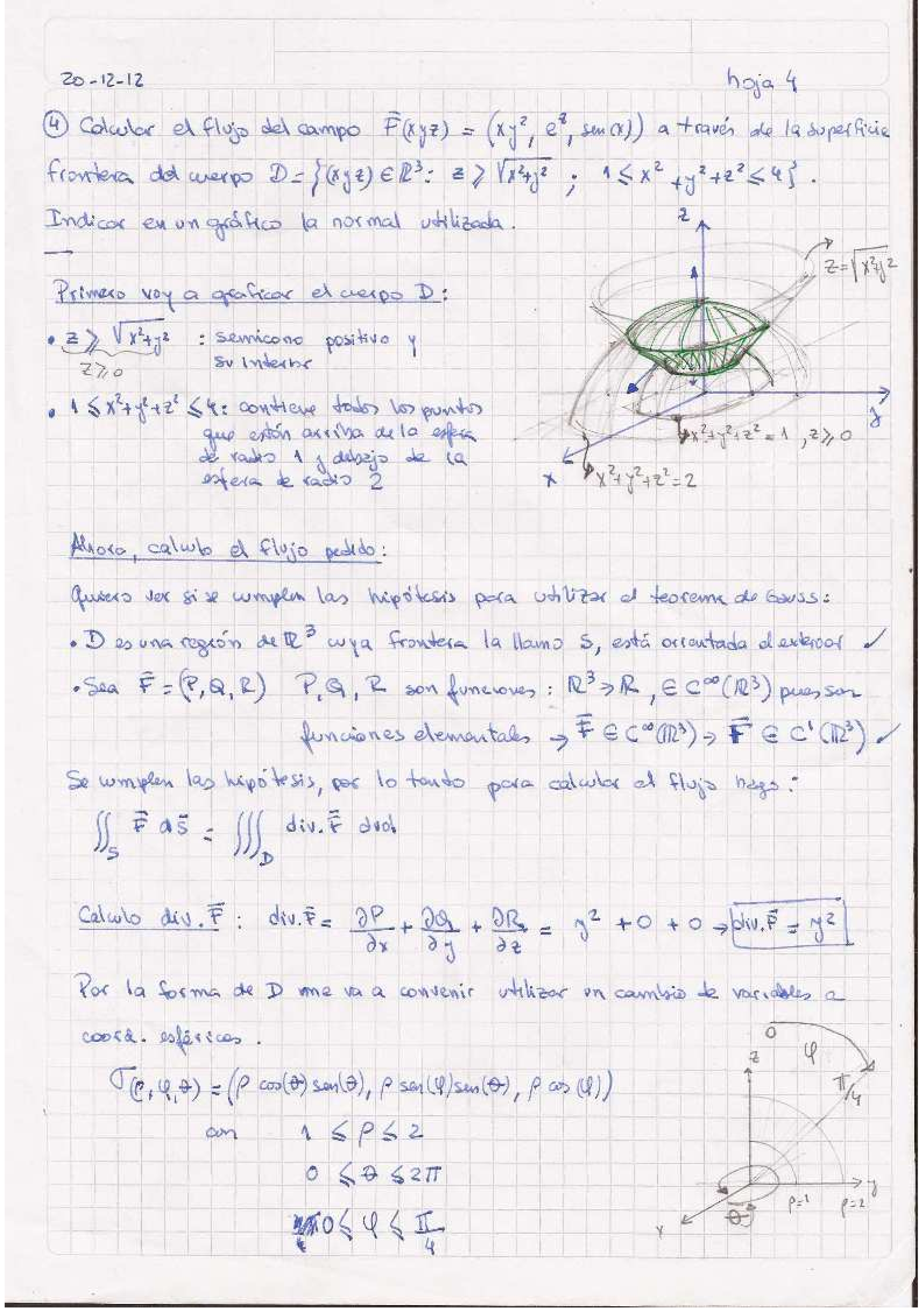
Por enunciado $\int_C \nabla h = 0$

h también es cons. $\to$ pues cumple ① $\in C^2(\mathbb{R}^3) \to \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $dom(h) = \mathbb{R}^3$ (simpl. conexo)

$$\int_C \nabla h = h(Q) - h(P) = 0 \to h(Q) = h(P)$$

$$\boxed{\frac{h(Q)}{h(P)} = 1}$$

continuando con $*$: $\int_C \vec{F}\, d\vec{\ell} = \ln\left(\frac{h(Q)}{h(P)}\right) = \ln(1) = \boxed{0 = \int_C \vec{F}\, d\vec{\ell}}$



20-12-12

④ Calcular el flujo del campo $\vec{F}(xyz) = (xy^2, e^z, \text{sen}(x))$ a través de la superficie frontera del cuerpo $D = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2} \; ; \; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.
Indicar en un gráfico la normal utilizada.

Primero voy a graficar el cuerpo D:

- $\underbrace{z \geq \sqrt{x^2+y^2}}_{z \geq 0}$: semicono positivo y su interior
- $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$: contiene todos los puntos que están arriba de la esfera de radio 1 y debajo de la esfera de radio 2

Ahora, calculo el flujo pedido:

Quiero ver si se cumplen las hipótesis para utilizar el teorema de Gauss:

- D es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera la llamo S, está orientada al exterior ✓
- Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ P, Q, R son funciones : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pues son funciones elementales $\Rightarrow \vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto para calcular el flujo hago:

$$\iint_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_D \text{div.}\vec{F} \; dvol$$

Calculo div. $\vec{F}$: $\text{div.}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{\text{div.}\vec{F} = y^2}$

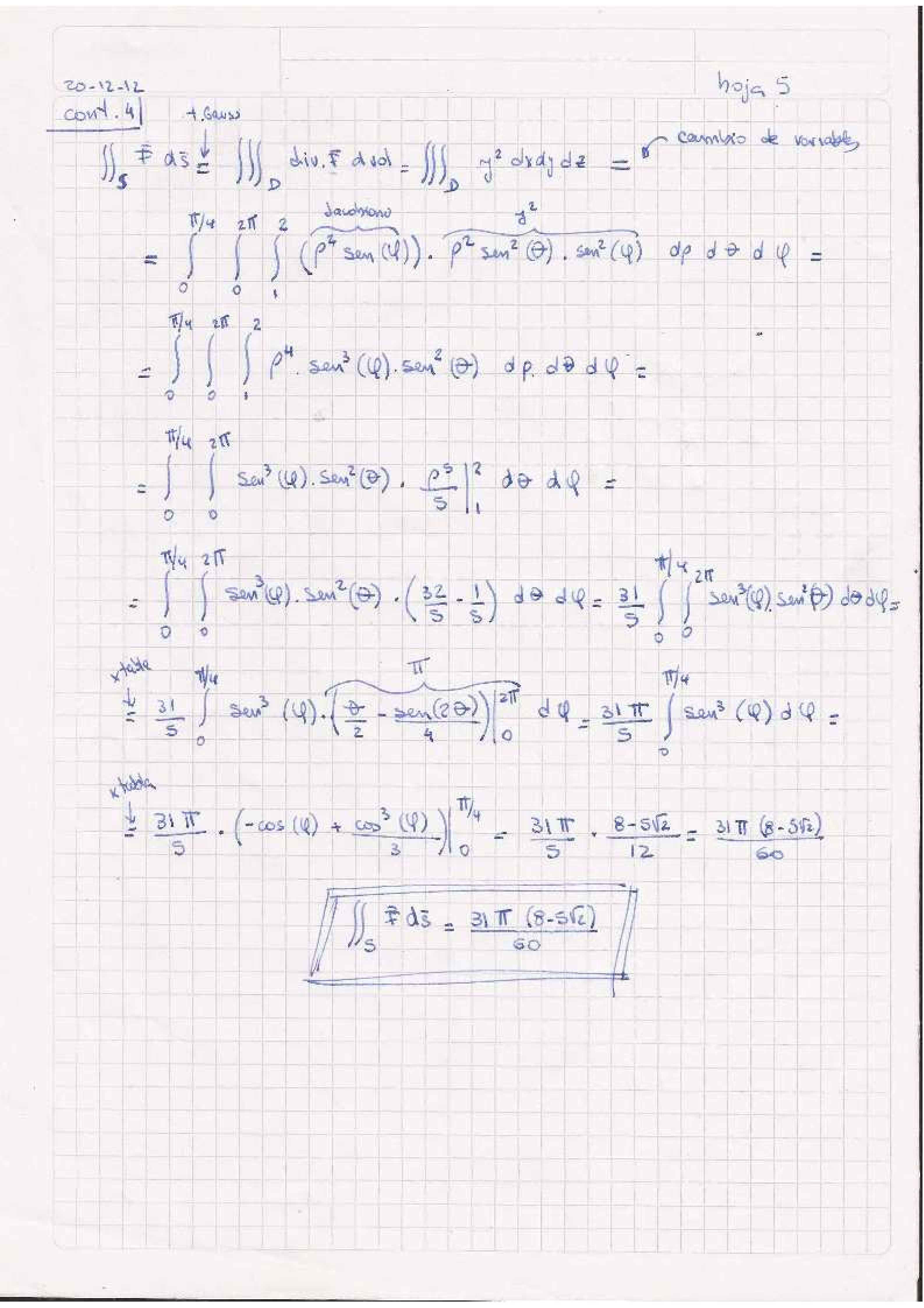
Por la forma de D me va a convenir utilizar un cambio de variables a coord. esféricas.

$$\sigma(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos(\theta)\text{sen}(\varphi), \rho\, \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$$

con $1 \leq \rho \leq 2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$



20-12-12 hoja 5

cont. 4

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} \overset{\text{t. Gauss}}{=} \iiint_D \text{div}.\bar{F}\, d\,vol = \iiint_D y^2\, dx\,dy\,dz = \quad \text{(cambio de variable)}$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \overbrace{\left(\rho^2\, \text{sen}(\varphi)\right)}^{\text{Jacobiano}} \cdot \overbrace{\rho^2\, \text{sen}^2(\theta)\cdot \text{sen}^2(\varphi)}^{y^2}\; d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^4 \cdot \text{sen}^3(\varphi)\cdot \text{sen}^2(\theta)\; d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^3(\varphi)\cdot \text{sen}^2(\theta)\cdot \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_1^2 d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^3(\varphi)\cdot \text{sen}^2(\theta)\cdot \left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right) d\theta\, d\varphi = \frac{31}{5}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^3(\varphi)\, \text{sen}^2(\theta)\, d\theta\, d\varphi =$$

$$\overset{\text{x tabla}}{=} \frac{31}{5}\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3(\varphi)\cdot \overbrace{\left.\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right)\right|_0^{2\pi}}^{\pi} d\varphi = \frac{31\pi}{5}\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3(\varphi)\, d\varphi =$$

$$\overset{\text{x tabla}}{=} \frac{31\pi}{5}\cdot \left.\left(-\cos(\varphi)+\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right)\right|_0^{\pi/4} = \frac{31\pi}{5}\cdot\frac{8-5\sqrt{2}}{12} = \frac{31\pi\,(8-5\sqrt{2})}{60}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \frac{31\pi\,(8-5\sqrt{2})}{60}}$$

20-12-12 hoja 6

⑤ Sea $\bar{F}$ un campo vectorial $C^3(\mathbb{R}^3)$ t.q. $\nabla \times \bar{F}(xyz) = (-2x, y, z)$ y $g(xyz) = x^2y + yz^2$. Siendo $\bar{H} = \bar{F} + \nabla g$, hallar la circulación de $\bar{H}$ a lo largo de la curva frontera de la superficie $\Sigma = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 = 1;\ 0 \leq x \leq y;\ z \geq 0\}$
Indicar en un gráfico el sentido de circulación elegido.

Primero voy a analizar la superficie dada por Σ.

- $y^2+z^2 = 1 \rightarrow$ cilindro con eje en el eje x con radio 1
- $0 \leq x \leq y \wedge z \geq 0 \rightarrow 1°$ octante
- $x \leq y$

z, $y=0$, N, Σ, $y^2+z^2=1$, y, 1, C, $0 \leq y$, x, 1, $x \leq y$

Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes (ya que piden calcular la circ. en una sup de $\mathbb{R}^3$)

- Σ es una sup suave orientable y $\in C^\infty \rightarrow \in C^2(\mathbb{R}^3)$, pues es una porción de cilindro $y^2+z^2=1$. Una parametrización sería $\varphi(x, r, \theta) = (x, r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$ con $r=1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq x \leq \cos(\theta)$ $\rightarrow$ $\boxed{\varphi(x,\theta) = (x, \cos(\theta), \text{sen}(\theta))}$
  ($\pi/2$, z, 0, y)
  Las componentes de φ son func. elementales $\Rightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ✓
- $C = \delta\Sigma$ es una curva suave a trozos, regular y orientada positivamente ✓
- $\bar{H} = \bar{F} + \nabla g$, donde $\bar{F} \in C^3(\mathbb{R}^3)$ x enunciado y $\nabla g \in C^\infty$ porque es suma de funciones elementales $\therefore \bar{H} \in C^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{H} \in C^1$ en Σ ✓

Como se cumplen las hipótesis, uso T. Stokes:

$$\oint_{C^+} \bar{H}\, d\bar{l} = \iint_\Sigma \text{rot.}\bar{H}\, d\bar{s} = \iint_\Sigma \text{rot.}(\bar{F} + \nabla g)\, d\bar{s} = \iint_\Sigma (\underbrace{\text{rot.}\bar{F}}_{(-2x,y,z)} + \underbrace{\text{rot.}\nabla g}_{0})\, \underbrace{d\bar{s}}_{\check{n}.ds} =$$

Sea $M_{(xyz)} = (-2x, y, z)$ ($M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) $\rightarrow * = \iint_\Sigma M(xyz) \cdot \check{n}\, ds = \iint_{D^{x\theta}} M(\varphi(x,\theta)) \cdot \cancel{\|\bar{n}\|} \cdot \frac{\bar{n}}{\cancel{\|\bar{n}\|}} \cdot dx d\theta$ ($\check{n}$)

$0 \leq \theta \leq \pi/2$
$0 \leq x \leq \cos(\theta)$

$\pi/2$, z, 0, D, x, 1, $-x$ ← está dibujado "en espejo"

cont. 5)

Hallo $m = \varphi'_\theta \times \varphi'_x$ $\qquad \varphi(x,\theta) = (\underbrace{x}_{x}, \underbrace{\cos(\theta)}_{y}, \underbrace{\operatorname{sen}(\theta)}_{z})$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$

$0 \leq x \leq \cos(\theta)$

$\varphi'_\theta = (0, -\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$

$\varphi'_x = (1, 0, 0)$

$\rightarrow m = (0, \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$

$$M(\varphi(x,\theta)) = (\overbrace{-2x}^{-2x}, \overbrace{\cos(\theta)}^{y}, \overbrace{\operatorname{sen}(\theta)}^{z})$$

Entonces:

$$\iint_D M(\varphi(x,\theta)) \cdot m \, dx\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} (-2x, \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \cdot (0, \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \, dx\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} \underbrace{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)}_{1} \, dx\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} dx\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta =$$

$$= \operatorname{sen}(\theta) \Big|_0^{\pi/2} = 1 \quad \therefore$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{H}\, d\bar{l} = 1}$$